

No.3 対角化

この回のゴール

- 対角化可能の定義を述べ、「固有ベクトルからなる基底がある」ことと同値であることを説明できる。
- 与えられた行列を対角化する (P と $P^{-1}AP$ を求める) ことができる。
- 対角化できるかどうかを、重複度を使って判定できる。

■ 1. 対角化とは

定義 1 対角化可能

n 次正方行列 A に対して、正則行列 P をうまく選ぶと $P^{-1}AP$ が対角行列になるとき、 A は**対角化可能**であるという。 $P^{-1}AP$ を求めることを A を**対角化**するという。

第 5 章 No.5 で見たように、 $P^{-1}AP$ は「 P の列を基底としたときの f_A の表現行列」である。表現行列が対角行列 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ になるとは、基底の各ベクトル $\mathbf{p}_j$ が $A\mathbf{p}_j = \lambda_j\mathbf{p}_j$ を満たす、つまり**固有ベクトル**であることにほかならない。

定理 1 対角化可能の条件

n 次正方行列 A について、次は同値である。

- A は対角化可能である。
- A の固有ベクトルで、1 次独立なものが n 本とれる (固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底がある)。

このとき、1 次独立な固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ (固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) を並べて $P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

【証明】 $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とおく。 P の第 j 列を $\mathbf{p}_j$ とすると

$$AP = (A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n), \quad PD = (\lambda_1\mathbf{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{p}_n).$$

(b) $\Rightarrow$ (a) : $A\mathbf{p}_j = \lambda_j\mathbf{p}_j$ より $AP = PD$. $\mathbf{p}_j$ は 1 次独立なので P は正則 (第 4 章 No.2 定理 5) で、 $P^{-1}AP = D$.

(a) $\Rightarrow$ (b) : $P^{-1}AP = D$ なら $AP = PD$ で、列を比べると $A\mathbf{p}_j = \lambda_j\mathbf{p}_j$. P は正則なので $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{0}$ で、 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ は 1 次独立な固有ベクトル。 $\square$

注意

P の第 j 列の固有ベクトルと、 D の第 j 対角成分の固有値は必ず対応させる。並べる順番を変えれば D の対角成分の順番も変わる (P も D も 1 通りではない)。

■ 2. 対角化の手順

手順

1. 固有方程式を解いて固有値を求める。
2. 各固有値について固有空間の基底を求める。
3. 基底を全部集めて n 本あれば対角化可能。それらを並べて P を作り、対応する固有値を並べて D を作る。 n 本に足りなければ対角化できない。

P^{-1} を実際に計算しなくても、 $AP = PD$ を確かめれば検算になる。

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。

【解答】 No.2 例題 1 より、固有値 5 の固有ベクトル ${}^t(1, 1)$ 、固有値 2 の固有ベクトル ${}^t(1, -2)$ 。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(第 5 章 No.5 練習問題 2 で計算した結果と一致する。)

定理 2 固有値がすべて異なる場合

n 次正方行列 A が n 個の相異なる (実数の) 固有値をもてば、 A は対角化可能である。

【証明】 各固有値から固有ベクトルを 1 本ずつとると、No.1 定理 3 より n 本は 1 次独立。定理 1 より対角化可能。 □

例題 2 重解があっても対角化できる例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。

【解答】 No.2 例題 2 より、固有値は 4 (単根) と 1 (2 重根) で、 $W(4) = \langle {}^t(1, 1, 1) \rangle$ 、 $W(1) = \langle {}^t(-1, 1, 0), {}^t(-1, 0, 1) \rangle$ 。基底を合わせると 3 本。これらを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($\det P = 3 \neq 0$ で、3 本が 1 次独立であることも確かめられる。)

例題 3 対角化できない例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化できないことを示せ.

【解答】 No.2 練習問題 1 (2) より固有値は 3 (2 重根) だけで, $W(3) = \langle {}^t(1, 1) \rangle$ は 1 次元. 1 次独立な固有ベクトルは 1 本しかとれず, 2 本に足りないので, 定理 1 より対角化できない.

コラム: 対角化できないとどうなるか

例題 3 の行列は, 固有ベクトルの方向 ${}^t(1, 1)$ はあるものの, それ以外の方向を「ずらして」しまう. 対角行列にはできないが, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ という「対角行列に近い形」にはできる. これが No.5 のジョルダン標準形である.

■ 3. 対角化可能性の判定

定理 3

A の相異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とし, 各固有空間 $W(\lambda_i)$ の基底をとる. それらを全部集めたベクトルの組は 1 次独立である.

【証明】 各 $W(\lambda_i)$ の基底ベクトルの 1 次結合で $\mathbf{0}$ を作ったとする. 同じ固有空間に属する項をまとめて $\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ ($\mathbf{w}_i \in W(\lambda_i)$) と書く. $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{w}_i$ は固有値 λ_i の固有ベクトルなので, もしそれが 1 つでもあれば, No.1 定理 3 (異なる固有値の固有ベクトルは 1 次独立) に矛盾する. よってすべての $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$. 各 $W(\lambda_i)$ の基底は 1 次独立なので, その係数はすべて 0. $\square$

定理 4 対角化可能の判定法

n 次正方行列 A について, 次は同値である.

- (a) A は対角化可能である.
- (b) 固有空間の次元の和が n に等しい: $\dim W(\lambda_1) + \dots + \dim W(\lambda_k) = n$.
- (c) 固有多項式が実数の範囲で 1 次式の積に分解し, すべての固有値で (幾何的重複度) = (代数的重複度).

【証明】 (a) $\Leftrightarrow$ (b): 定理 3 より, 固有空間の基底を集めた組は 1 次独立で, その本数は $\sum \dim W(\lambda_i)$. これは 1 次独立な固有ベクトルの最大本数でもある (どの固有ベクトルもいずれかの $W(\lambda_i)$ に入る). 定理 1 より従う.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): 固有値 λ_i の代数的重複度を m_i とすると, $\sum m_i \leq n$ (等号は 1 次式の積に分解するとき). No.2 定理 2 より $\dim W(\lambda_i) \leq m_i$ なので, $\sum \dim W(\lambda_i) \leq \sum m_i \leq n$. 左端が n に等しいのは, 両方の不等号が等号になるとき, つまり (c) のときである. $\square$

判定のコツ

- 固有値がすべて単根なら、それだけで対角化可能 (定理 2).
- 重根 λ_0 (代数的重複度 m) があるときは, $\dim W(\lambda_0) = n - \text{rank}(A - \lambda_0 E)$ が m に等しいかを調べる.
- 実数の範囲で考えているので, 固有多項式が実数の根をもたない因数 ($\lambda^2 + 1$ など) を含めば対角化できない.

■ 練習問題

1. 次の行列を対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列は対角化可能か. 理由とともに答えよ.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能となる a の条件を求めよ.

4. A が対角化可能ならば, A^k (k は自然数) と ${}^t A$ も対角化可能であることを示せ.

5. (考えてみよう) A が対角化可能で, 固有値が λ_0 だけであるとき, $A = \lambda_0 E$ であることを示せ. これを使って, 例題 3 の行列が対角化できないことを別の方法で示せ.

■ 練習問題の解答

1. (1) 固有値 3, -1, 固有ベクトル ${}^t(1, 1)$, ${}^t(1, -1)$ (No.2 練習問題 1 (1)). $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) 上三角行列なので固有値は 1, 2. $W(1) = \langle {}^t(1, 0) \rangle$, $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $W(2) = \langle {}^t(1, 1) \rangle$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) No.2 練習問題 1 (3) より, 固有値 1, 2, 3 の固有ベクトルは ${}^t(1, 0, 1)$, ${}^t(1, 1, 1)$, ${}^t(1, 1, 2)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) できない. 固有値 1 (2 重) で, $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のランク 1 より $\dim W(1) = 1 < 2$. (b) で

きない (実数の範囲では). 固有多項式 $\lambda^2 + 1$ が実数の根をもたない. (c) できない. 固有値 1 (2 重), 2. $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のランク 2 より $\dim W(1) = 1 < 2$. (d) できる. 下三角行列で固有値 1, 2, 3 がすべて異なる (定理 2).

3. 固有値は 2 (2 重) と 1. $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $a = 0$ ならランク 1 で $\dim W(2) = 2$, 対角化可能. $a \neq 0$ ならランク 2 で $\dim W(2) = 1$, 対角化できない. よって条件は $a = 0$.

4. $P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする. $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k$ は対角行列 (間の PP^{-1} が消える). また ${}^tD = {}^tP {}^tA {}^t(P^{-1}) = Q^{-1} {}^tA Q$ ($Q = {}^t(P^{-1})$, $Q^{-1} = {}^tP$) で, ${}^tD = D$ は対角行列.

5. $P^{-1}AP = \lambda_0 E$ なら, $A = P(\lambda_0 E)P^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} = \lambda_0 E$. 例題 3 の行列は固有値が 3 だけなので, もし対角化可能なら $3E$ に等しいはずだが, そうではない.